Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 3 de 2004

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx$

Solución

Para calcular $\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx$ determinamos primero las raíces del denominador, para descomponerlo en producto de factores y aplicarle la técnica de las integrales racionales.
Resolvemos $x^2 + 2x - 3 = 0$ y obtenemos x = 1 y x = - 3, luego

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{A}{x-1}+\frac{b}{x+3}\right)dx =$$

$= \left[A\cdot Ln|x-1|+B\cdot Ln|x+3|\right]_{-2}^{0}$ = (A·Ln(1) + B·Ln(3)) - ((A·Ln(3) + B·Ln(1)) =
= + B·Ln(3) - A·Ln(3) = (B – A) ·Ln(3) =*= (sustituyendo) = (-1/4 + -1/4)) ·Ln(3) =
= (- 2/4)) ·Ln(3) = (- 1/2)) ·Ln(3)

* Calculamos los coeficientes A y B

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3} = \frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualando numeradores
1 = A·(x + 3) + B·(x - 1)
Para x = 1 tenemos 1 = A·(1 + 3) = 4A, de donde A = 1/4
Para x = - 3 tenemos 1 = B·(- 3 – 1) = - 4B, de donde B = - 1/4

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 3 de 2004

Se sabe que la función f : (− 1, 1) → $\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{1}{2}x+c & si \quad -1<x<0, \\ \sqrt{1-x} & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$

es derivable en el intervalo (− 1, 1).
(a) [1 punto] Determina el valor de la constante c.
(b) [0'5 puntos] Calcula la función derivada f '.
(c) [1 punto] Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f que son paralelas a la recta de ecuación y = x.

Solución

(a)
Como la función es derivable en (-1,1) es continua en (-1,1), en particular en x = 0, es decir:
f(0) = $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$
f(0) = √(1) = 1

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-x}$ = √(1) = 1; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0} (2x^2-\frac{1}{2}x+c)$ = c

Por tanto c = 1, y la función es $f(x)=\begin{cases} 2x^2-\frac{1}{2}x+1 & si \quad -1<x<0, \\ \sqrt{1-x} & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$

(b)
La función derivada es

$$f\ '(x)=\begin{cases} 4x-\frac{1}{2} & si \quad -1<x<0, \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & si \quad 0\le x<1 \end{cases}$$

(c)
Si las rectas tangentes a f son paralelas a y = - x, sus pendientes son iguales.

La pendiente de y = - x es y ‘ = - 1
La pendiente genérica de f(x) es f ‘(x). Las igualamos para ver en que puntos tenemos que calcular las rectas tangentes. Tenemos que igualar f ‘(x) = -1, pero utilizando ambas ramas de la función.

Si – 1 < x < 0, 4x – (1/2) = -1, luego 4x = - 1 + 1/2 = - 1/2, de donde x = - 1/8 $\in$ (-1,0)

La recta tangente en x = - 1/8 es y – f(- 1/8) = f ‘(1/8)(x + 1/8)
f(- 1/8) = 2(-1/8)^2 – (1/2)(-1/8) + 1 = 2/64 + 1/16 +1 =(70/64) = (35/32)
f ‘(- 1/8) = 4(-1/8) – (1/2) = – (1/2) – (1/2) = – 1
La recta tangente en x = - 1/8 es y – (35/32) = (1)(x + 1/8)

Si 0 < x < 1, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ = -1, luego - 1 = $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$. Elevando al cuadrado tenemos 1 = $\frac{1}{4(1-x)}$., de donde 4(1 – x) = 1, es decir 4 – 4x = 1, por tanto 4x = 3, y la solución es x = 3/4 $\in$ (0,1)

La recta tangente en x = 3/4 es y – f(3/4) = f ‘(3/4)(x + 1/8)
f(3/4) = $\sqrt{1-\frac{3}{4}}$ = $\sqrt{\frac{1}{4}}$ = (1/2); f ‘(3/4) = $\frac{-1}{2\sqrt{1-\frac{3}{4}}}$ = $\frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}$ = – 1/1 = - 1.
La recta tangente en x = 3/4 es y – (1/2) = (-1)(x – 3/4)

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 3 de 2004

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z &= 1 \\ \lambda x + y &= 2 + \lambda \end{aligned}$$

(a) [1’5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A* = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Para que el sistema sea compatible, según el teorema de Rouche, tiene que ser rango(A) = rango(A*)

det(A) = |A| = $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = (-1)(λ - 1)·$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$ = (-1)(λ - 1)·(1 - λ^2).

Lo igualamos a cero.
(-1)(λ - 1)·(1 - λ^2) = 0, y obtenemos λ = 1 y λ = ± 1
Si λ ≠ ± 1, rango(A) = rango(A*) = 3 y e sistema es compatible y determinado. (solución única)

Si λ = 1,

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

En A vemos que rango(A) = 1, puesto que una columna es 0 y las dos primeras son iguales.
En A*, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2 ≠ 0, rango(A*) = 2.
Como rango(A) = 1 ≠ rango(A*) = 2, por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible (no tiene solución)

Si λ = - 1,

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rango(A) = 2. En A^*, como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, rango($A^*$) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el Teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado. Este es el caso que hay que resolver ene. Apartado (b).

(b)

Si λ = - 1, como rango(A) = = rango(A^*) = 2, por el Teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado.

Como el rango es 2 solo necesitamos dos ecuaciones (tomaremos aquellas con las que se ha formado el menor distinto de cero) y dos incógnitas principales. En nuestro caso:

$-x + y - 2z = 1$

$-x + y = 1$

Restando obtenemos 2z =0, de donde z =0, por tanto tomando $x = \mu$, $y = 1 + \mu$, con lo cual la solución del sistema es $(x,y,z) = (\mu, 1 + \mu, 0)$ con $\mu \in R$

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 3 de 2004

[2'5 puntos] Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano z = 0.

Solución

La recta la vamos a dar como intersección de dos planos

Formamos el haz de planos que genera la recta "r", lo consideramos como un "plano" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano z = 0

Haz de planos que genera la recta "r": $(x - y) + \lambda(z - 2) = 0 = x - y + \lambda z - 2\lambda = 0$.

Su vector normal sería $\mathbf{n_1} = (1,-1, \lambda)$

Vector normal del plano z = 0 es $\mathbf{n} = (0,0,1)$

Como han de ser perpendiculares su s vectores normales también y por tanto su producto escalar ha de ser cero $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n_1} = 0 = (0,0,1)\bullet (1,-1, \lambda) = \lambda = 0$, luego el primer plano sería $\pi_1 \equiv x - y = 0$

Formamos el haz de planos que genera la recta "s", lo consideramos como un "plano" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano z = 0

Haz de planos que genera la recta "s": $(x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0 = x + y + \lambda z + (-1 - 2\lambda) = 0$.

Su vector normal sería $\mathbf{n_2} = (1,1, \lambda)$

Vector normal del plano z = 0 es $\mathbf{n} = (0,0,1)$

Como han de ser perpendiculares su s vectores normales también y por tanto su producto escalar ha de ser cero $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n_2} = 0 = (0,0,1)\bullet (1,1, \lambda) = \lambda = 0$, luego el segundo plano sería $\pi_2 \equiv x + y - 1 = 0$

La recta pedida es la intersección de los planos π_1 y π_1, es decir

$x - y = 0$

$x + y - 1 = 0$

Otra forma (Javier Costillo)

Podemos calcular los haces planos que generan las rectas r y s, de manera que la intersección de ambos nos dará el conjunto de rectas que cortan a r y s.

Haz de planos generados por r: $(x - y) + \lambda(z - 2) = 0$

Haz de planos generados por s: $(x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0$

Conjunto de rectas que cortan a r y s: $\begin{cases} (x - y) + \lambda(z - 2) = 0 \\ (x + y - 1) + \lambda(z - 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x - y + \lambda z - \lambda 2 = 0 \\ x + y + \lambda z - 1 - 3\lambda = 0 \end{matrix}$

De todas ellas, nos interesa aquella que es perpendicular al plano $z = 0$, es decir, aquella cuyo vector director es proporcional a (0,0,1).

Los vectores directores del conjunto de rectas son de la forma:

$$\vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (-2\lambda, 0, 2) \approx (-\lambda, 0, 1)$$, luego, evidentemente, $\lambda = 0$.

Así, la recta pedida viene dada, en sus ecuaciones implícitas, por $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Se comprueba fácilmente que esta recta es perpendicular al plano dado, ya que su vector director es (0,0,1), y corta a la recta r en el punto (1/2,1/2,2) y a la recta s en (1/2,1/2,3).

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 3 de 2004

Sea f : [0, 2π] → R la función definida por $f(x) = e^x\cdot(\cos x + \text{sen } x)$.
(a) [1’25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(b) [1’25 puntos] Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f.

Solución

(a)
Sea f : [0, 2π] → ℜ, $f(x) = e^x\cdot(\cos x + \text{sen } x)$.
Para ver su monotonía estudiamos su primera derivada f ‘(x) en [0, 2π].
$f'(x) = e^x\cdot(\cos x + \text{sen } x) + e^x\cdot(- \text{sen } x + \cos x) = e^x\cdot(2\cos x)$.
$f'(x) = 0$
$(e^x\cdot 2\cos x) = 0$, como e^x nunca es cero al ser una función exponencial solo es cero cos(x). Pero cos(x) = 0 sólo en x = π/2 ≅ 1’57 y x = 3π/2 ≅ 4’7 en el intervalo [0, 2π].

Como $f'(1) = e^1$ (2cos (1)) > 0, entonces f(x) crece en (0, π/2). ((Cuidado calculadora en radianes para calcular cos(1)))
Como $f'(3) = e^3$ (2cos (3)) < 0, entonces f(x) decrece en (π/2, 3π/2). ((Cuidado calculadora en radianes para calcular cos(3)))
Como $f'(5) = e^5$ (2cos (5)) > 0, entonces f(x) crece en (3π/2, 2π). ((Cuidado calculadora en radianes para calcular cos(5)))
(b)
Por definición x = π/2 es un máximo relativo y vale
$f(\pi/2) = e^{\pi/2}(\cos(\pi/2) + \text{sen}(\pi/2)) = e^{\pi/2}(0 + 1) = e^{\pi/2} \cong 4'8$

Por definición x = 3π/2 es un mínimo relativo y vale
$f(3\pi/2) = e^{3\pi/2}(\cos(3\pi/2) + \text{sen}(3\pi/2)) = e^{3\pi/2}(0 - 1) = - e^{3\pi/2} \cong - 111'32$

Los extremos absolutos se suelen encontrar en los puntos donde la función no es continua (ninguno), no es derivable (ninguno), las soluciones de f ‘(x) = 0 (ya los hemos utilizado)y los extremos del intervalo, en nuestro caso x = 0 y x = 2π. Solo nos queda ver el valor de f(x) en 0 y 2π. El mayor valor de los cuatro será el máximo absoluto y el menor valor de los cuatro será el mínimo absoluto.

$f(0) = e^0(\cos(0) + \text{sen}(0)) = 1(1 + 0) = 1$
$f(2\pi) = e^{2\pi}(\cos(2\pi) + \text{sen}(2\pi)) = e^{2\pi}(1 + 0) = e^{2\pi} \cong 535'49$

El máximo absoluto se alcanza en x = 2π y vale $f(2\pi) = e^{2\pi} \cong 535'49$
El mínimo absoluto se alcanza en x = 3π/2 y vale $f(3\pi/2) = - e^{3\pi/2} \cong - 111'32$.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 3 de 2004

[2’5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = (x - 1)\cdot e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$.

Solución

Una primitiva de f(x) es $F(x) = \int f(x)\,dx$. Como pasa por $(1, e^2)$ tendremos $F(1) = e^2$.
$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x - 1)\cdot e^{2x}\,dx$, que es una integral por partes. Por tanto tomamos:
$u = x – 1$, de donde $du = dx$
$dv = e^{2x}\,dx$,, de donde $v = \int e^{2x}\,dx = (e^{2x})/2$. Luego
$F(x) = \int (x - 1)\cdot e^{2x}\,dx = F(x) = \int f(x)\,dx = (x - 1)\cdot (e^{2x})/2 - \int (e^{2x})/2\,dx =$
$= (x - 1)\cdot (e^{2x})/2 - (1/2)\cdot (e^{2x})/2 = (e^{2x})[(x – 1)/2 – 1/4] + K$
Como $F(1) = e^2$, tenemos $e^2 = e^2\cdot(0 – 1/4) + K$. De donde $K = e^2\cdot(1 + 1/4) = (5/4)\cdot e^2$, y la primitiva pedida es
$F(x) = (e^{2x})[(x – 1)/2 – 1/4] + K = (e^{2x})[(x – 1)/2 – 1/4] + (5/4)\cdot e^2$.

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 3 de 2004

Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3 € las del tipo B y a 4 € las del tipo C, entonces obtiene un total de 20 € . Pero si vende a 1€ las del tipo A, a 3 € las del B y a 6 € las del C, entonces obtiene un total de 25 € .
(a) [0'75 puntos] Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.
(b) [1 punto] Resuelve dicho sistema.
(c) [0'75 puntos] ¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).

Solución

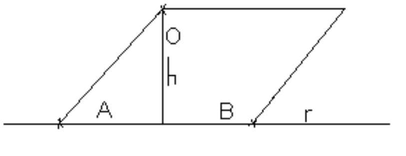
(a)
$1\cdot A + 3\cdot B + 4\cdot C = 20$
$1\cdot A + 3\cdot B + 6\cdot C = 25$
(b)
Restando en el sistema anterior tenemos $2\cdot C = 5$, de donde $C = 5/2$ y el sistema nos queda:
$1\cdot A + 3\cdot B + 10 = 20$
$1\cdot A + 3\cdot B + 15 = 25$
Si no damos cuenta tenemos una sola ecuación $A + 3\cdot B = 10$, con dos incógnita. Tomando $B = \lambda \in \Re$, nos resulta $A = 10 – 3\lambda$, y la solución del sistema es $(A,B,C) = (10 – 3\lambda, \lambda, 5/2)$ con $\lambda \in \Re$,
(c)
El problema es absurdo y no real, puesto que el número de botellas del tipo C es 5/2 que no es un número entero y positivo, sino racional. Por esto en el apartado (b) no he puesto el parámetro λ como número entero positivo sino como número real.

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 3 de 2004

Sean los puntos A(1, 0, -1) y B(2, -1, 3).
(a) [1'5 puntos] Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por A y por B.
(b) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo de vértices consecutivos ABCD sabiendo que la recta determinada por los vértices C y D pasa por el origen de coordenadas.

Solución

(a)
A(1, 0, -1) y B(2, -1, 3).

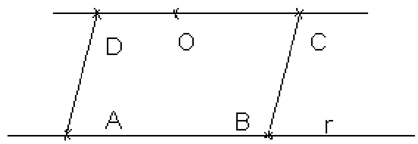


Para calcular la distancia del origen O a la recta que pasa por A y B, podemos considerar el paralelogramo de la figura y tener en cuenta que:
Área paralelogramo = **||ABxAO||** = {módulo del producto vectorial de los vectores AB y AO } = (base)(altura) = **||AB||**· d(O,"r") de donde
d(O,"r") = (**||ABxAO||**) / (**||AB||**)
AB = (1,-1, 4), luego **||AB||** = $\sqrt{(1 + 1 + 16)} = \sqrt{(18)}$
AO = (-1,0, 1)

$$\mathbf{ABxAO} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(5) + \mathbf{k}(-1) = (-1,-5,-1)$$

||ABxAO|| = √(1 + 25 + 1) = √(27), luego
d(O,"r") = **||ABxAO||**) / (**||AB||**) = (√(27)) / (√(18)) unidades de longitud (u.l.)

(b)



Como me piden el área del paralelogramo ABCD y el origen O está en la recta que contiene C y D, el área es la base (**||AB||**) por la altura (d(O,"r")), luego:
Área paralelogramo = (**||AB||**)·d(O,"r") = (**||AB||**)· (**||ABxAO||**) / (**||AB||**) =
= **||ABxAO||** = √(1 + 25 + 1) = √(27) unidades de área (u.a.)